測定に付随する情報量の熱攪乱による損失(基研研究会「熱現象を扱う場の理論とその応用」,研究会報告)

阿部, 純義; 鈴木, 徳一

測定に付随する情報量の熱攪乱による損失

阿部純義 、鈴木徳一　　（日大理工・物理）

非可換な物理量A,Bの測定に対する Heisenbergの不確定性関係は、規格化された状態 $|\psi>$におけるAの測定値の偏差を$\Delta_{\psi}A$とすると、通常

$$\Delta_{\psi}A\cdot\Delta_{\psi}B \geqq \frac{1}{2}|<\psi|[A, B]|\psi>|, \tag{1}$$

と表されるが、交換関係［A,B］がC－数でないときには$|\psi>$を適当に選択することにより右辺を任意に小さくすることができる。実際、$|\psi>$がAかBのどちらかの固有状態の場合には右辺はゼロになる。従って (1)式の型の不確定性関係は実際には現実的な意味をもたない。不確定性関係が量子力学の基本的な原理であることを考えると、このような弱点はなんとしても修正されなければならない。ここ数年間、情報理論的な量の考察にもとづくそのような研究が、幾人かの人々によって行なわれてきた。［その主な成果 及び以下の議論の詳細については、我々の最近の論文 S.Abe and N.Suzuki: Phys. Rev.A41 (1990, *in press*) とそこに挙げてある参考文献を参照していただきたい。］

Deutsch(1983) とPartovi(1983)は、$\Delta_{\psi}A$などの量の代わりに状態$|\psi>$における A の測定値の不確定さの測度として

$$S_A[\psi] = -\sum_{\alpha}|<\alpha|\psi>|^2 \ln|<\alpha|\psi>|^2, \quad (A|\alpha>=\alpha|\alpha>), \tag{2}$$

で定義される情報エントロピーを考え、和

$$U[A,B:\psi] = S_A[\psi] + S_B[\psi], \tag{3}$$

が、$|\psi>$に依存しない非ゼロの普遍的な下限をもつということを議論した。すなわちこのような定式化は、通常の Heisenberg型の不確定性関係(1)よりも強い関係式を与えるのである。このようにして得られる新しい不確定性関係を情報エントロピー的不確定性関係とよぶ。 なお、(2)式の量は通常の量子論的な演算子の期待値という形をしておらず、表示に依存する量であることに注意する。

正準共役な観測可能量の組に対しては(1)式に上述のような問題はない。 一方、対応する(2)式は位置Xと運動量Pの場合、

$$U[X,P:\psi] \geqq 1 + \ln\pi, \tag{4}$$

と表されることが既に以前から知られていた(Bialynicki-Birula and Mycielski,1975)。

ここでは、測定の対象系が混合状態にある場合のエントロピーの増加、すなわち情報量の損失はどの程度であるかを議論する。 一般の開放系に対しては(4)式のような明確な結果は得られていない。そこで最も単純な場合として、環境と温度$T(=1/\beta)$で熱平衡状態にある粒子のXとPの測定について考えることにする。

熱平衡状態にある量子系を取り扱うためには TakahashiとUmezawa (1975) の thermo field dynamics (TFD) の形式を用いるのが便利である。TFDのひとつの特徴は状態ベクトルの属する空間が、対象系の Hilbert空間Hと架空のtilde空間$\tilde{H}$との積 $H\otimes\tilde{H}$ になることである (Ojima,1981)。 従って、一般の熱的状態 $|\psi,\tilde{\psi};\beta\rangle$から自然に作られる確率密度 $|\langle\alpha,\tilde{\alpha}|\psi,\tilde{\psi};\beta\rangle|^2$ (表示の基底 $|\alpha,\tilde{\alpha}\rangle$は $A,\tilde{A}$ の固有状態) を直ちに物理的な量と見なすことはできない。 物理的な確率密度は $\tilde{H}$ 部分のトレースをとることによって得られる簡約化された確率密度

$$\rho_R(\alpha) = \int_{\tilde{\alpha}} |\langle\alpha,\tilde{\alpha}|\psi,\tilde{\psi};\beta\rangle|^2, \tag{5}$$

である。このとき(2)式に対応する有限温度での情報エントロピーは

$$S_A[\psi,\tilde{\psi};\beta] = -\int_{\alpha} \rho_R(\alpha)\ln\rho_R(\alpha), \tag{6}$$

で与えられる。

我々の目的は与えられたβにおいて汎関数

$$U[X,P:\psi,\tilde{\psi};\beta] = S_X[\psi,\tilde{\psi};\beta] + S_P[\psi,\tilde{\psi};\beta], \tag{7}$$

の停留値を求めることである。ここでは変分法によるアプローチを試みることにする。

我々が注目している系は、あくまでも簡約化された物理的な系であることに改めて注意する。 従って、汎関数Uの与えられたβでの最小値は、この部分系内で決定されなけれ

ばならない。この事情は変分の操作のなかに次のように反映される：

$$|\psi,\tilde{\psi};\beta> \longrightarrow |\psi,\tilde{\psi};\beta> + \varepsilon|\xi,\tilde{\psi};\beta>, \tag{8}$$

ただし、εとξはそれぞれ無限小変分パラメーターとH成分の任意の変形を表している。この操作によって規格化された熱的状態$|\psi,\tilde{\psi};\beta>$に関する汎関数Uは

$$U[X,P:\psi,\tilde{\psi};\beta] \longrightarrow U[X,P:\psi,\tilde{\psi};\beta] + \varepsilon\Gamma + o(\varepsilon^2), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Gamma \equiv & \left[\int dx\,\rho_R(x)\,ln\,\rho_R(x) + \int dp\,\rho_R(p)\,ln\,\rho_R(p)\right]<\psi,\tilde{\psi};\beta|\xi,\tilde{\psi};\beta> \\ & - \iint dx d\tilde{x}\;\; ln\,\rho_R(x)<\psi,\tilde{\psi};\beta|x,\tilde{x}><x,\tilde{x}|\xi,\tilde{\psi};\beta> \\ & - \iint dp d\tilde{p}\;\; ln\,\rho_R(p)<\psi,\tilde{\psi};\beta|p,\tilde{p}><p,\tilde{p}|\xi,\tilde{\psi};\beta>,\end{aligned} \tag{10}$$

のように変分をうける。

停留値の条件を与える方程式$\Gamma=0$の一般解を求めるのは困難である。しかしここで情報エントロピーが不確定性のひとつの測度であること、T=0 の純粋状態の場合には調和振動子のコヒーレント状態が Heisenbergの不確定性$\Delta X\cdot\Delta P$ に対して 最小値1/2 を与えることなどを考慮するならば、 TFDにおけるコヒーレント状態 (Mann, Revzen, Nakamura, Umezawa and Yamanaka, 1989)について調べるのが妥当であろう。

熱的真空をT=0でのFock真空$|0,\tilde{0}>$を用いて、

$$|0(\beta)> = e^{-iG}|0,\tilde{0}>, \quad -iG(\beta) = \theta(\beta)(a^+\tilde{a}^+ - \tilde{a}a), \tag{11}$$

$$\cosh\theta(\beta) = [1 - \exp(-\beta\omega)]^{-1/2}, \tag{12}$$

と表すとき(ωは調和振動子の振動数)、熱的コヒーレント状態(TCS)は Bogoliubov変換された消滅演算子

$$a(\beta) = e^{-iG}\,a\,e^{iG} = a\cosh\theta(\beta) - \tilde{a}^+\sinh\theta(\beta), \tag{13a}$$

$$\tilde{a}(\beta) = e^{-iG}\,\tilde{a}\,e^{iG} = \tilde{a}\cosh\theta(\beta) - a^+\sinh\theta(\beta), \tag{13b}$$

の固有状態として

$$|z,\tilde{z};\beta\rangle = \exp[za^{+}(\beta) - z^{*}a(\beta) + \tilde{z}^{*}\tilde{a}^{+}(\beta) - \tilde{z}\tilde{a}(\beta)]\,|0(\beta)\rangle, \quad (14)$$

$$a(\beta)\,|z,\tilde{z};\beta\rangle = z\,|z,\tilde{z};\beta\rangle, \quad \tilde{a}(\beta)\,|z,\tilde{z};\beta\rangle = \tilde{z}^{*}\,|z,\tilde{z};\beta\rangle, \quad (15)$$

のように定義される。ただし (15)の第二式で固有値が共役複素数になっているのは、TFDのもつ tilde共役則による。

TCSからの変分(8)を計算することにより、$\Gamma^{TCS}=0$ 及び

$$U[X,P:z,\tilde{z};\beta] \longrightarrow 1 + \ln\pi + \ln[\cosh 2\theta(\beta)] + o(\varepsilon^{2}), \quad (16)$$

を示すことができる。従って、熱的な情報エントロピーの不確定性関係

$$U[X,P:\psi,\tilde{\psi};\beta] \geqq 1 + \ln\pi + \ln[\cosh 2\theta(\beta)], \quad (17)$$

が得られる。右辺の第三項は与えられた温度での熱攪乱による情報量の損失の最小値を与えている。

最後に(17)式から $T\neq 0$ でのHeisenbergの不確定性関係が導かれることを簡単に示す。固定された偏差 $\langle (X-\langle X\rangle)^{2}\rangle=(\Delta X)^{2}$ ($\langle\cdot\rangle$は$\rho_{R}(x)/\langle\psi,\tilde{\psi};\beta\,|\,\psi,\tilde{\psi};\beta\rangle$による期待値) を与える関数のうち凸汎関数$S_{x}$を最大にするものを求めたい。このことは、Lagrange乗数λをもつ汎関数

$$\Phi[\psi,\tilde{\psi};\beta] = S_{x}[\psi,\tilde{\psi};\beta] - \lambda[\langle (X - \langle X\rangle)^{2}\rangle - (\Delta X)^{2}], \quad (18)$$

で特徴づけられる条件つき変分問題を解くことに等しい。Φに対して 再び変分操作(8)をほどこすことにより、エントロピーの最大値

$$S_{x}^{max}[\psi,\tilde{\psi};\beta] = \frac{1}{2}\ln[2\pi e(\Delta X)^{2}], \quad (19)$$

が得られる。これは、不等式

$$S_{x}[\psi,\tilde{\psi};\beta] \leqq \frac{1}{2}\ln[2\pi e(\Delta X)^{2}], \quad (20)$$

を意味する。同様の議論を運動量Pに対して行なえば、

$$S_P[\psi, \tilde{\psi}; \beta] \leqq \frac{1}{2} ln[2\pi e(\Delta P)^2], \tag{21}$$

が導かれる。更に、(20)及び(21)式を組合せることにより、

$$\begin{aligned} 2(\Delta P)^2 &\geqq \exp\{-1-ln\pi+2S_P[\psi, \tilde{\psi}; \beta]\} \\ &\geqq \exp\{1+ln\pi+2ln[\cosh 2\theta(\beta)]-2S_X[\psi, \tilde{\psi}; \beta]\} \\ &\geqq \frac{1}{2}\cosh^2 2\theta(\beta)\cdot(\Delta X)^{-2}, \end{aligned} \tag{22}$$

なる関係式が成立することが分かる。従って、T≠0でのHeisenbergの不確定性関係

$$\Delta X\cdot\Delta P \geqq \frac{1}{2}\cosh 2\theta(\beta), \tag{23}$$

が得られる。ただし、(22)式の二番目の不等式において(17)式を用いているが、このことから情報エントロピーの不確定性関係の方がHeisenberg型の不確定性関係よりも強い関係式であることが分かる。

[参考文献]

Deutsch D, Phys.Rev.Lett.50,631(1983).
Partovi M H, Phys.Rev.Lett.50,1883(1983).
Bialynicki-Birula I and Mycielski J, Commun.Math.Phys.44,129(1975).
Takahashi Y and Umezawa H, Collect.Phenom.2,55(1975).
Ojima I, Ann.Phys.137,1(1981).
Mann A,Revzen M,Nakamura K,Umezawa H, and Yamanaka Y, J.Math.Phys.30,2883(1989).